УДК 537 (076.1)
ББК 22.33 я 73 – 4
Г 41

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (протокол № 10 від 30 жовтня 2010 року)

Рецензенти:
В.А. Макара, член-кореспондент НАН України, завідувач кафедри фізики металів Київського національного університету імені Тараса Шевченка;
О. І. П'ятак, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри фізики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету;
Ю. С. Жаркіх, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри електрофізики КНУ імені Тараса Шевченка;
С. М. Гойса, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри електрофізики КНУ імені Тараса Шевченка.

Гірка В.О., Гірка І.О. **Лекції з курсу фізики «Механіка та молекулярна фізика» для студентів природничих факультетів.** Навчальний посібник / Харків: ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2010. – 367 с.

Посібник написано на основі лекцій з механіки та молекулярної фізики, які автори читали упродовж багатьох років у Харківському університеті. Його зміст відповідає програмі з фізики для студентів факультету комп'ютерних наук. Значну увагу приділено математичним аспектам розв'язання задач класичної механіки: вибору моделі, що заміняє реальний фізичний об'єкт, та зручної системи координат, процедурам здобуття та розв'язання відповідних диференціальних рівнянь тощо. До кожного підрозділу додано питання для самоконтролю, кожну главу забезпечено задачами для проведення модульних контрольних робіт.

ISBN

ЗМІСТ

Передмова

Видання містить конспект лекцій, що їх автори читали від часу заснування у 2000 році в Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна факультету комп’ютерних наук студентам першого курсу. Від самого початку на факультеті комп’ютерних наук викладали професори механіко-математичного та фізико-технічного факультетів. І коли участь викладачів механіко-математичного факультету ні в кого не викликала питань, то участь викладачів фізико-технічного факультету потребує деяких коментарів.

Фізико-технічний факультет, у свою чергу, походить з ядерного відділення фізичного факультету. Наукові дослідження, які були і лишились невід’ємною, більше того, однією з основних складових виховання студентів на фізико-технічному факультеті, завжди вимагали автоматизації експерименту, якнайкращого віддаленого електронного керування фізичними процесами, вишуканого володіння математичними, в тому числі числовими, методами обробки здобутих експериментальних результатів. Все це обумовило високий рівень комп’ютеризації наукового пошуку на фізико-технічному факультеті. Але обчислювальна техніка ніколи не розглядалась на факультеті як самоціль, а лише як інструмент, хоча й дуже важливий і потужний, інструмент науковця. Багатий досвід участі випускників факультету у міжнародному науковому розподілі праці підтверджує, що зазвичай з двох дослідників успішнішим є не той, хто краще володіє обчислювальною технікою, що її застосовують для дослідження фізичного процесу, а той, хто краще розуміється на предметі дослідження. Не випадково, що згодом факультет комп’ютерних наук увійшов до складу Інституту високих технологій університету, що об’єднав його з фізико-технічним факультетом.

При викладанні курсу фізики студентам факультету комп’ютерних наук ми намагалися дотримуватись традицій методики викладання на фізико-технічному факультеті. Зокрема, запропонований курс лекцій ставить на меті не лише ознайомити студента із сукупністю знань з певного розділу фізики, але й озброїти його набором прийомів і методів дослідження навколишнього світу. Ми намагались прищепити майбутнім

дослідникам уважне, тремтливе ставлення до числа, яке виражає значення фізичної величини. Коли комп’ютер видає результат обчислень фізичної задачі, не слід поспішати записати його як відповідь. Спочатку слід проаналізувати його, подумати, як співвідноситься отримане число із відомою картиною устрою світу. Комп’ютер ніколи не помиляється, але інколи помиляється програміст: чи то під час написання програми, чи то при виборі моделі фізичного явища. Здобутий результат є більш переконливим, якщо його підтверджено аналітичною оцінкою або числовим результатом, що його здобуто іншим методом.

Оскільки кількість навчальних годин, що виділено на викладання фізики на факультеті комп’ютерних наук, є меншою порівняно з відповідною кількістю годин, що передбачені навчальним планом фізико-технічного факультету, то значну увагу при викладанні даного курсу ми намагалися приділити методу аналогій. Корисний та плідний сам по собі, метод аналогій якнайкраще пасує до тих ситуацій, коли за браком часу необхідно без застосування рутинних математичних процедур здобути потрібну математичну формулу, що описує досліджуваний фізичний процес. Крім того, цей метод добре ілюструє спорідненість фізичних явищ, які спостерігаються в різних галузях фізики, а отже, його застосування привчає студентів не боятися самостійно вивчати різні фізичні явища, застосовуючи вже звичні математичні процедури. Це прищеплює студентові смак до творчої наукової праці.

Анрі Пуанкаре писав: «Учений досліджує природу не тому, що це корисно, – він займається вивченням природи, бо він у захваті від неї; і він у захваті, бо вона красива. Коли б природа не була красивою, вона не була б гідною бути досліджуваною, та коли б природа не була гідною бути досліджуваною, не варто було б жити».

§ 1. МЕХАНІКА

Механіка – це найстаріша галузь фізики. Її закони одержано з експерименту. Але для з’ясування подробиць того, як відбуваються ті чи інші складні явища, як в найпростіший спосіб описати ці явища, в нагоді стає математика. Цікаво, що Ньютон, займаючись проблемами створення основних засад механіки, одночасно брав активну участь у розробці основ диференціального та інтегрального числення.

Механіка – наука про рух та рівновагу тіл. Рух матерії (в широкому розумінні) – це будь-яка її зміна в часі. Механічний рух – це найпростіша форма руху, яка відповідає переміщенню механічного тіла відносно інших тіл у просторі з часом. В нашому курсі при теоретичному вивченні законів механіки використовуватимуться дві математичні абстракції замість конкретних механічних тіл: матеріальна точка та абсолютно тверде тіло.

Матеріальна точка – це макроскопічне механічне тіло (його розміри можна визначити простими механічними методами порівняння з еталоном довжини), форма якого не має значення, а розміри якого є нехтовно малими (їх можна не брати до уваги) в тому русі, який досліджується у даній задачі. При цьому важливими є відносні розміри тіла у порівнянні з характерними розмірами траєкторій, вздовж яких відбувається рух, а також характер руху. Один і той саме механічний об’єкт у різних задачах може описуватися різними абстракціями. Наприклад, при вивченні прямолінійного поступального руху завжди можна не брати до уваги розміри тіла, спостерігаючи за рухом однієї точки, яка знаходиться, наприклад, у центрі мас цього тіла. Візьмемо інший приклад: радіус земної орбіти в процесі обертання навколо Сонця $R_{ЗС} \approx 1{,}5 \times 10^8$ км, радіус Землі $R_З \approx 6{,}4 \times 10^3$ км. Розглянемо дві різні задачі: Земля рухається по орбіті навколо Сонця та Земля обертається навколо власної осі. В умовах першої задачі Земля – це є матеріальна точка, бо $R_{ЗС} >> R_З$, а для випадку обертання навколо власної осі Земля вже є не матеріальною точкою, а може описуватися (з певною точністю, у першому наближенні) як абсолютно тверде тіло (визначення центра мас та абсолютно твердого тіла буде надано пізніше).

Рух матеріальної точки є повністю описаним, якщо відомо її положення в будь-який момент часу, тобто задано її радіус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$. Радіус-вектором матеріальної точки називають вектор, що поєднує початок системи відліку з матеріальною точкою. Щоб задати положення матеріальної точки, слід спочатку визначитися з системою відліку. Тілом відліку зветься спеціально обране тіло або система кількох тіл, відносно яких в обраній системі координат, використовуючи обраний масштаб, визначається розташування досліджуваного тіла. Разом з обраною системою координат тіло відліку утворює просторову систему відліку. Оскільки в даному курсі вивчається класична нерелятивістська механіка, то час тече однаково в усіх системах відліку. Тому, додавши до просторової системи відліку прилад вимірювання часу, отримуємо повну систему відліку. Через тривимірність навколишнього простору положення кожної матеріальної точки в обраній просторовій системі відліку можна задати трьома числами – проекціями радіус-вектора точки на осі обраної системи координат: X, У, Z. Найчастіше для опису положення матеріальної точки в просторі використовують одну з ортогональних систем координат: декартову, циліндричну або сферичну, бо їхні осі є взаємно перпендикулярними. Вибір системи координат визначається з міркувань симетрії задачі та найбільшої зручності для користувача: що менше скалярних рівнянь потрібно для опису руху, то краще. В даному курсі механіки буде використано праву координатну систему, для ортів (одиничних базисних векторів) якої має місце наступний зв'язок у вигляді векторного добутку: $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = \vec{e}_3$ (детальніше про векторний добуток ітиметься в параграфі 1.1.1 цих лекцій).

Згідно з навчальною програмою до курсу “Механіка” входить шість тем: 1) кінематика матеріальної точки, 2) динаміка матеріальної точки, 3) вільний рух системи матеріальних точок, 4) силове поле, 5) механічний рух матеріальної точки в неінерціальних системах відліку, 6) обертальний рух абсолютно твердого тіла. Незважаючи на те, що чотири перші теми вивчалися до певної міри у середній школі, не слід думати, що у запропонованому курсі немає чого вчити, що сесію можна пройти, користуючись тільки “шкільним багажем знань”. Класичну механіку (механіку Ньютона) слід буде заново вивчити на якісно новому математичному ґрунті. Це корисно як з точки зору глибшого розуміння механіки, так і з точки зору отримання практичного досвіду із застосування математичних знань, закріплення теоретичного матеріалу, який викладається в курсах математичного аналізу та аналітичної геометрії. Це дозволить побачити внутрішній зв'язок між різними підрозділами механіки, побачити, що ці різні її підрозділи є єдиною наукою, яку побудовано на спільних принципах, що різні типи механічного руху описуються спільними математичними методами. Аналізуючи результати навчання багатьох випусків студентів, хотілося б застерегти першокурсників від спрощеного розуміння мети навчання, від такої думки: що, буцімто, для здобуття знань з фізики на рівні, дещо вищому за середній, досить буде вивчити тільки основні формули та знати, у яких випадках слід використовувати ту чи іншу формулу. Навпаки, найбільшу цінність становить знання методики розв'язання задач з різних розділів механіки. Видатний вчений Арнольд Зоммерфельд казав: «Формули мають бути сумою, результатом наших знань про об'єкт дослідження, а не джерелом цих знань».

Досвід багатьох поколінь першокурсників свідчить, що однією з основних проблем під час навчання на першому курсі є невміння застосовувати математичні знання до розв'язання фізичних задач. Часто важко зрозуміти з першого разу, що швидкість матеріальної точки це є перша похідна від координати матеріальної точки за часом, бо у середній школі швидкість визначалась за допомогою операції ділення (а те, що то були середні значення швидкості, вже забулося). Тому курс механіки починається з вивчення «Кінематики», де добре відомі механічні терміни (швидкість, прискорення і таке інше) подано в новій редакції, спираючись на поняття про похідну та первісну функції, про вектори та їхні властивості, що дозволить, окрім усього іншого, здобути певні практичні навички з кількох основних розділів аналітичної геометрії та диференціального числення.

§ 1.1. Кінематика матеріальної точки

Кінематика матеріальної точки визначає зв'язок між різними характеристиками механічного руху, використовуючи для цього математичний апарат теорії диференціального числення та аналітичної геометрії. Інакше кажучи, кінематика вивчає

характеристики та особливості механічного руху, не беручи до уваги: які фізичні причини цього руху, яка маса та форма того механічного об'єкта, рух якого вивчається. При цьому вважається, що розмірами об'єкта за умов конкретної задачі можна знехтувати.

1.1.1. Про використання знань вищої математики при розв'язанні фізичних задач

Як відомо, мовою фізики є математика. Цікаво відзначити, що засновник класичної механіки (об'єкти дослідження якої мають характерні розміри значно більші за атомні, а швидкість руху яких є значно меншими за швидкість світла у вакуумі) І. Ньютон зробив також величезний внесок у різні галузі вищої математики.

Більшість механічних величин є векторами, тобто об'єктами, що характеризуються не лише довжиною (модулем) вектора, але й його орієнтацією у просторі відносно базисних осей обраної системи координат. Так, положення матеріальної точки в обраній системі координат задається радіус-вектором, зміну радіус-вектора з часом визначає вектор швидкості. При дослідженні обертального руху користуються, наприклад, векторами кутової швидкості, моментом імпульсу тощо. Для практичних цілей зручно користуватися проекціями цих векторів на осі обраної системи координат, які є скалярними величинами. Тоді, проекція вектора $\vec{R}$ на орт $\vec{e}_j$ обраної системи координат визначається скалярним добутком $\left(\vec{R},\vec{e}_j\right)=R_j \quad =\left|\vec{R}\right|\left|\vec{e}_j\right| cos(\angle\vec{R},\vec{e}_j)$. Взагалі, за допомогою скалярного добутку можна визначити проекцію будь-якого вектора $\vec{A}$ на напрямок довільного вектора $\vec{B}$: $A_{\vec{B}}=(\vec{A},\vec{B})/\left|\vec{B}\right|$. Скалярний добуток будь-яких двох векторів $\vec{C}$ та $\vec{D}$ у тривимірній ортогональній системі координат визначається як сума: $\left(\vec{C},\vec{D}\right)=C_1D_1+C_2D_2+C_3D_3$, тут C_j і D_j – проекції векторів на відповідні базисні осі $\vec{e}_j$ обраної системи координат. Через скалярний добуток визначається механічна робота $\delta A=(\vec{F},d\vec{l})$, де $d\vec{l}$ – це вектор елементарного переміщення, $\vec{F}$ – це сила, що виконує дану роботу.

Операція векторного добутку широко вживається в задачах про обертальний рух. Наприклад, момент зовнішньої сили $\vec{M}$, що діє на абсолютно тверде тіло (АТТ), яке здатне обертатися навколо закріпленої осі, визначається як векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$, що проведено в найкоротший спосіб від осі обертання до точки АТТ, до якої прикладено силу $\vec{f}$: $\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{f}\right] = \vec{e}_{\perp}|\vec{r}||\vec{f}|sin(\angle\vec{r}, \vec{f})$, де $\vec{e}_{\perp}$ – це одиничний вектор, що направлений перпендикулярно до площини, в якій розташовано вектори $\vec{r}$ та $\vec{f}$. При цьому з кінця вектора $\vec{e}_{\perp}$ найкоротший поворот від вектора $\vec{r}$ до вектора $\vec{f}$ виглядає як такий, що виконується в додатному напрямку кутів, тобто проти стрілки годинника. Інакше кажучи, вектори $\vec{r}$, $\vec{f}$ та $\vec{e}_{\perp}$ складають праву трійку. Зверніть увагу, що перестановка місць векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у векторному добутку призводить до зміни напрямку результуючого вектора на протилежний, тобто: $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$. Інформацію про операції з векторами наведено додатково у підрозділі 1.1.3.

Коли розв’язуєш задачі про механічний рух, доводиться мати справу з диференціальними рівняннями першого порядку. Наприклад, таким є основне рівняння динаміки поступального руху: $d\vec{p}/dt = \sum\vec{F}$. Задачі про механічний рух залежно від умов можна поділити на дві групи: прямі та зворотні задачі механіки. Такий поділ пов’язано з використанням або прямої, або зворотної математичної дії, тобто знаходиться або похідна функція від відомої функції шляхом диференціювання, або означений інтеграл від відомої функції.

Наприклад, з умов задачі відома швидкість $\vec{V}$ прямолінійного руху матеріальної точки, а потрібно знайти її прискорення. Це випадок прямої задачі кінематики, вона розв’язується шляхом диференціювання вектора швидкості: $\vec{a} = d\vec{V}/dt$. При цьому слід пам’ятати, що при оптимальному виборі системи координат буде отримано одне скалярне рівняння для проекції швидкості на обрану вісь. А в інших випадках буде два або три вирази для проекцій швидкості на осі координат в обраній системі відліку, і процедуру диференціювання потрібно буде

застосовувати до всіх цих виразів, щоб обчислити явні вирази для усіх проекцій прискорення.

Якщо ж в задачі потрібно знайти залежність координати матеріальної точки від часу, то така задача є зворотною, і розв’язується вона шляхом інтегрування рівняння: $\vec{V} = d\vec{r}/dt$. Для цього спочатку запишемо вираз для елементарного переміщення $d\vec{r}$ (диференціала радіус-вектора): $d\vec{r} \equiv \vec{V}dt$. Далі, обчислюючи неозначений інтеграл $\int d\vec{r} = \int\vec{V}dt$, отримуємо: $\vec{r} = \int_{t_0}^{t}\vec{V}dt + \vec{r}(t_0)$, де $\vec{r}(t_0)$ – стала інтегрування.

При розв’язанні зворотних задач слід пам’ятати, що неозначений інтеграл обчислюється з точністю до константи, тобто розв’язок диференціального рівняння *n*-го порядку містить *n* констант інтегрування. Для визначення цих констант слід застосувати початкові умови. Наприклад, нехай для випадку одновимірного руху відомо, що в момент часу t_0 координата матеріальної точки мала значення $x(t_0)=x_0$, а механічний рух відбувся зі сталим значенням швидкості $V(t) = V_*$. Тоді $x = \int V_*dt = V_*t + const$, використання початкових умов дозволяє записати: $x(t_0) = V_*t_0 + const$. Звідси $const = x_0 - V_*t_0$. Таким чином, залежність координати від часу для даної задачі має такий вигляд: $x(t) = (t - t_0)V_* + x_0$.

Розв’язуючи механічні задачі експериментальним шляхом (або в числовий спосіб), слід рахуватися з тим, що всі фізичні величини при цьому визначаються внаслідок вимірювання, а всі фізичні вимірювання супроводжуються похибками. А при числовому способі розв’язання задачі всі величини та процедури обчислення виконуються з певною точністю. Ця обставина унеможливлює граничний перехід від малих значень часу Δt та координати Δx до нуля. В експериментальній практиці, починаючи з певного малого значення Δt, частка $\Delta x/\Delta t$ в межах досягнутої точності вимірювання Δx перестає змінюватися монотонно або навіть починає змінюватися хаотично. Тому подальше зменшення проміжку часу Δt не має сенсу. Це обумовлено тим, що відносна точність довільного вимірювання є тим меншою (тим гіршою), чим меншою є величина, що вимірюється. Наприклад, досить легко виміряти 1 *м* з точністю до 1 *мм*, тобто відносна точність такого вимірювання становить: 10^{-3}. А спробуйте-но виміряти 1 *мм* з такою ж відносною точністю! Для цього знадобиться мікрометр, прилад з поділками в 10^{-6} м.

Через похибки вимірювання експериментальне визначення дійсної швидкості (на відміну від математичної границі: $V = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$) можна здійснити лише приблизно, ототожнюючи цю величину з часткою малих, але скінченних приростів $V \approx \frac{\Delta x}{\Delta t}$. Ці скінченно малі прирости координати та часу, частка яких з певною точністю апроксимує похідну $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, у фізиці називають фізично нескінченно малими величинами та оперують з ними, як з математичними диференціалами.

Наведемо ще один приклад, який ілюструє різницю аналітичного та експериментального підходів до визначення фізичних величин у механіці. З точки зору математики густина речовин визначається так: $\rho = \lim\limits_{\Delta \upsilon \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta \upsilon} = \frac{dm}{d\upsilon}$, тут υ – це об’єм. З точки зору фізики це визначення втрачає сенс через атомну будову речовин. Об’єм речовини має бути ***макро***величиною, щоб у ньому знаходилося багато частинок (атомів). А з іншого боку це має бути ***мікро***величина, щоб значення ρ не залежало від форми, розмірів та об'єму речовини. Таким чином, зменшення величини досліджуваного механічного об'єкта має критичну межу, що має чисто фізичну природу: розміри об'єктів класичної механіки мають перевищувати характерні молекулярні розміри.

1.1.2. Швидкість та прискорення під час прямолінійного руху

Прямолінійним називають такий механічний рух, при якому усі точки об’єкта, який бере участь в такому русі, рухаються вздовж прямих ліній, що є паралельними одна до одної. Тому у цьому

випадку, незалежно від маси об’єкта, його форми та розподілу маси по об’єму, дослідження руху конкретного механічного об’єкта можна замінити дослідженням руху матеріальної точки.

Для прямолінійного руху положення матеріальної точки у просторі можна визначити однією координатою $x = x(t)$, бо такий рух відбувається вздовж прямої лінії. Звичайно, якщо невдало обрати просторову систему координат, то може знадобитися і дві або три координати. Тоді потрібно буде розв’язувати систему, відповідно, двох або трьох скалярних рівнянь, які отримують шляхом знаходження проекцій вектора, який задано в конкретній задачі, на обрані осі координат і які, зрештою, виявляються лінійно залежними. Але будемо вважати, що систему координат вибрано в оптимальний спосіб.

Якщо в момент часу t_0 положення матеріальної точки визначалося координатою $x_0 = x(t_0)$, то за часовий проміжок $\Delta t = t_2 - t_0$ матеріальна точка в процесі прямолінійного руху здійснить переміщення: $\Delta x = x_2 - x_0$, де $x_2 = x(t_2)$. Переміщення вважається позитивним, якщо координата кінцевого положення матеріальної точки є більшою за величину її координати в початковому положенні $x_2 > x_0$, та негативним – у протилежному випадку. Оскільки в даному підрозділі досліджується прямолінійний рух, то всі векторні величини, що описують механічний рух за цих умов, матимуть абсолютну величину, яка співпадатиме з модулем їхньої проекції на вісь $\vec{x}$, а напрямок визначатиметься знаком проекції.

Частка переміщення Δx, яке виконано механічним об’єктом, до проміжку часу Δt, протягом якого воно відбулося, зветься середньою швидкістю руху цього об’єкта:

$$\langle V \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{t_0}^{t_0+\Delta t} V(t)dt \,. \qquad (1.1.1)$$

При цьому $\Delta t \neq 0$, бо в іншому випадку операція ділення є невизначеною. Проте Δt може прямувати до нуля, тому середня швидкість $\langle V \rangle = f(\Delta t)$ є функцією величини проміжку часу, протягом якого відбувалося переміщення.

Цікаво, що коли $\Delta t \to 0$, то величина переміщення $\Delta x \to 0$ також прямує до нуля (це добре зрозуміло, якщо проаналізувати інтегральний вираз для середньої швидкості). Але при цьому значення частки $\Delta x / \Delta t$ прямує до певної граничної величини, яка залежить від моменту часу t_0, для якого виконується обчислення величини цієї частки, але не залежить від величини проміжку часу Δt, протягом якого відбувалося переміщення! Ця гранична величина зветься дійсною (або миттєвою) швидкістю матеріальної точки в момент часу t_0 :

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\Big|_{t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}\Big|_{t_0} . \quad (1.1.2)$$

Такого типу граничні величини часто зустрічаються в математичному аналізі, звуться вони похідними від функції $x(t)$ за її аргументом t в момент часу t_0. Слід наголосити, що швидкість матеріальної точки – це є похідна від x саме за часом, бо взагалі кажучи, координата може бути функцією кількох змінних, тоді у студентів, які не мали достатньої практики з фізики та математики в середній школі, можуть виникати непорозуміння при вживанні такого важливого терміна, особливо на початку курсу.

При прямолінійному русі напрямок переміщення механічного об'єкта не змінюється (воно відбувається вздовж заданої координатної осі), тому швидкість такого руху в певний довільний момент часу визначатиметься функцією, що є похідною тільки від цієї координати за часом. Оскільки зміна часу є величиною додатною, то напрямок швидкості прямолінійного руху визначається знаком переміщення. Якщо координата механічного об'єкта зросла в процесі руху, то $V(t) > 0$ (це спостерігається за умов додатного переміщення, $\Delta x > 0$), а при від'ємному переміщенні $\Delta x < 0$ маємо, відповідно, $V(t) < 0$.

Прискорення при прямолінійному русі визначається функцією, яка є похідною від швидкості руху. Якщо скористатися виразом (1.1.2), то для прискорення в певний довільний момент часу t_* маємо наступну функціональну залежність від швидкості та координати, відповідно:

$$a(t_*) = \frac{dV}{dt}\Big|_{t_*} = \frac{d^2 x}{dt^2}\Big|_{t_*} . \quad (1.1.3)$$

Тобто для прямолінійного руху прискорення є першою похідною від швидкості за часом і другою похідною від координати за часом. Для прямолінійного руху прискорення може бути направлено паралельно або антипаралельно до вектора швидкості, в залежності від того, чи зростає швидкість з часом, чи зменшується, відповідно.

Ще раз звертаємо увагу на необхідність зазначати змінну, за якою відбувається знаходження похідної функції. Як видно з формули (1.1.2), швидкість є функцією двох змінних: часу та координати. Тому для уникнення можливих непорозумінь слід вказувати, за якою змінною відбувається диференціювання. Саме через цю обставину для позначень похідних функцій в нашому курсі використовуються позначки Лейбниця, з яких, по-перше, дуже чітко видно: від якої функції обчислюється похідна та за яким параметром це відбувається, і по-друге, можна чітко побачити зв'язок похідної функції з її диференціалом та диференціалом її аргументу, за яким визначається зміна функції. При цьому похідну в жодному разі не можна розглядати як частку диференціалів.

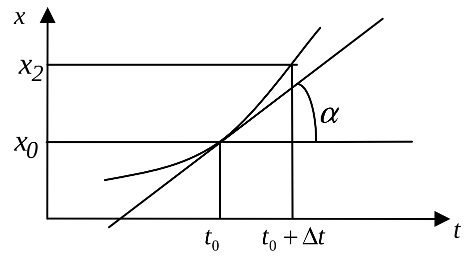

Рис. 1.1.1. Геометричний зміст похідної

На практиці часто не вдається описати координату та швидкість руху у вигляді аналітичних виразів, функцій від часу. Тоді на допомогу приходить графічний спосіб задавання цих функцій. Якщо намалювати графік координати $x = x(t)$ (див. рис. 1.1.1), а потім провести дотичну до кривої $x = x(t)$ в певній точці $x_0 = x(t_0)$, тоді, обчисливши тангенс кута нахилу α між віссю абсцис (віссю часу) та дотичною, можна вирахувати швидкість в цей момент часу

$$V(t_0) = tg(\alpha) = dx / dt\Big|_{t_0} . \quad (1.1.4)$$

Аналогічно, маючи графік швидкості $V = V(t)$, таким методом можна побудувати графік прискорення. Якщо провести дотичну лінію до кривої $V(t)$ в обраній точці $t = t_0$ за часом, то кут β між дотичною та віссю часу можна використати для обчислення прискорення:

$$a(t_0) = tg(\beta) = dV / dt\Big|_{t_0} . \qquad (1.1.5)$$

Таким чином, геометричний сенс похідної функції як тангенс кута нахилу між дотичною лінією до графіка даної функції та віссю часу може бути успішно використаним при знаходженні швидкості та прискорення прямолінійного руху, якщо відома графічна залежність координати цього руху від часу.

Визначення швидкості за відомою залежністю координати від часу разом із визначенням прискорення за відомою залежністю швидкості від часу складають зміст прямої задачі кінематики. Зворотна задача кінематики полягає у визначенні поточної швидкості $\upsilon(t)$ за відомими початковою $\upsilon(t_0)$ швидкістю та залежністю прискорення від часу $a(t)$ та/або визначенні поточної координати $x(t)$ за відомими початковою координатою $x(t_0)$ та залежністю швидкості від часу $\upsilon(t)$:

$$\upsilon(t) = \upsilon(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)dt; \; x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} \upsilon(t)dt. \qquad (1.1.6)$$

У разі, коли залежності $a(t)$ та/або $\upsilon(t)$ задано графічно, для визначення поточної швидкості $\upsilon(t)$ та/або поточної координати $x(t)$ можна скористатися геометричним змістом означеного інтеграла як площі під кривою, якою графічно описується підінтегральна функція.

1.1.3. Швидкість та прискорення у випадку руху матеріальної точки по колу

Довільний криволінійний рух можна уявити собі як рух по колу зі змінним радіусом. Перш ніж вивчати довільний криволінійний рух розглянемо його граничний випадок: рівномірний рух по колу із сталим значенням радіуса.

Коли матеріальна точка рухається по колу, то її положення визначається азимутальним кутом $\varphi(t)$ в полярній системі координат. Кут φ відраховується від певної осі, що з'єднує центр кола та початкове положення матеріальної точки на колі. Тоді кутовою швидкістю ω зветься перша похідна від $\varphi(t)$ за часом: $\omega = d\varphi / dt$. Зверніть увагу на те, що вектори $\vec{\varphi}$ та $\vec{\omega}$ мають напрямок, перпендикулярний до площини, в якій лежить траєкторія руху даної матеріальної точки. Якщо при такому русі зміна $\varphi(t)$ відбувається в напрямку за стрілкою годинника, то напрямок вектора $\vec{\omega}$ співпадає з напрямком погляду спостерігача на площину обертання («входить» у неї). А якщо зміна $\varphi(t)$ відбувається в напрямку проти руху стрілки годинника, то вектор $\vec{\omega}$ орієнтовано на спостерігача, перпендикулярно площині обертання, тобто вектор $\vec{\omega}$ «виходить» з цієї площини. За фізичним змістом вектор $\vec{\omega}$ вказує напрямок осі, навколо якої відбувається обертання, а модуль $|\vec{\omega}|$ задає кут в радіанах, на який відбувається поворот за одиницю часу.

Для лінійної швидкості $\vec{V}$ можна записати вираз через кутову швидкість, користуючись терміном «векторний добуток»:

$$\vec{V} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \qquad (1.1.7)$$

де $\vec{r}$ – це радіус-вектор, що визначає положення матеріальної точки. Якщо $\vec{r}$ домножити на $\vec{V}$ векторним чином, то за правилом розкриття подвійного векторного добутку отримаємо: $[\vec{r}, \vec{V}] = [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})$. Оскільки $\vec{r} \perp \vec{\omega}$, то їхній скалярний добуток дорівнює нулю, отже, $[\vec{r}, \vec{V}] = \vec{\omega} r^2$, а

$\vec{\omega} = \left[\vec{r}, \vec{V}\right] / r^2$. Якщо l – довжина дуги кола, вздовж якого рухається матеріальна точка, то $dl = rd\varphi$. Отже, для модуля лінійної швидкості при русі по колу можна записати: $V = dl / dt = rd\varphi / dt = r\omega$. Цей результат можна одразу здобути з (1.1.7), якщо взяти до уваги, що $\vec{r} \perp \vec{\omega}$.

Корисно також навести вираз для похідної від вектора $\vec{e}_i$ незмінної довжини, який обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$, тобто $\vec{e}_i$ змінює з часом свою орієнтацію у просторі, залишаючись сталим за модулем. Тоді (порівняйте з (1.1.7)):

$$d\vec{e}_i / dt = \left[\vec{\omega} \times \vec{e}_i\right]. \qquad (1.1.8)$$

Аналогічно до випадку прямолінійного руху можна ввести для руху по колу термін «кутове прискорення»:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \qquad (1.1.9)$$

Вектор кутового прискорення (аналогічно до випадку прямолінійного руху) орієнтовано паралельно вектору $\vec{\omega}$, якщо модуль кутової швидкості зростає з часом, або антипаралельно вектору $\vec{\omega}$ у випадку зменшення модуля кутової швидкості з часом. Доведемо це у випадку руху по колу:

$$\vec{\omega} = \vec{e}_\omega \omega(t),$$
$$\vec{\varepsilon} = d(\vec{e}_\omega \cdot \omega(t)) / dt = \vec{e}_\omega d\omega / dt + \omega(t)[\vec{\omega} \times \vec{e}_\omega]. \qquad (1.1.10)$$

Оскільки $\vec{\omega} \,||\, \vec{e}_\omega$, то останній доданок дорівнює нулеві, тому

$$\vec{\varepsilon} = \vec{e}_\omega d\omega / dt. \qquad (1.1.11)$$

Отже, обидва вектори кутової швидкості та кутового прискорення орієнтовано перпендикулярно до площини, в якій обертається досліджувана матеріальна точка.

Зворотна задача у випадку руху по колу полягає у визначенні поточної кутової швидкості $\omega(t)$ за відомими

початковою кутовою швидкістю $\omega(t_0)$ та залежністю кутового прискорення $\varepsilon(t)$ від часу та/або визначенні поточного кута $\varphi(t)$ за відомими початковим значенням кута $\varphi(t_0)$ та залежністю кутової швидкості $\omega(t)$ від часу:

$$\omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(t)dt, \quad \varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega(t)dt. \qquad (1.1.12)$$

1.1.4. Швидкість та прискорення при довільному криволінійному русі

У фізиці, на відміну від більшості інших точних наук, існує багато різних аналогій. Метод аналогій широко використовують у механіці. Він полягає у тому, що рівняння руху з точністю до заміни змінних є подібними одне одному для різних типів руху, співвідношення між основними та похідними змінними, що описують механічний рух, є подібними одне одному для різних типів руху. Наприклад, існують аналогії між поступальним та обертальним рухами:

1. аналогія між лінійними та кутовими координатами $x \leftrightarrow \varphi$,
2. аналогія між лінійною та кутовою швидкостями

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \leftrightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

3. аналогія між лінійним та кутовим прискоренням

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \leftrightarrow \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Існують також аналогії між зображенням руху матеріальної точки в координатному просторі x, y, z та у фазовому просторі швидкостей V_x, V_y, V_z (див. рис. 1.1.2). Наприклад: матеріальна точка $\leftrightarrow$ швидкісна точка, радіус-вектор $\leftrightarrow$ вектор швидкості,

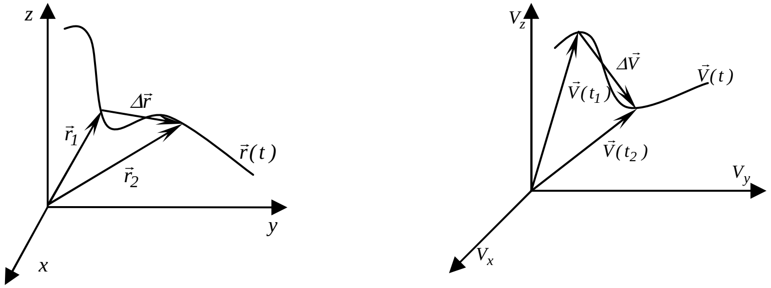

Рис. 1.1.2. Аналогія між радіус-вектором і вектором швидкості

траєкторія $\vec{r}(t)$ $\leftrightarrow$ годограф швидкості $\vec{V}(t)$, швидкість зміни координати (тобто швидкість руху) $\leftrightarrow$ прискорення (швидкість зміни швидкості з часом $\vec{a} = d\vec{V} / dt$), переміщення у координатному просторі $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ $\leftrightarrow$ зміна швидкості у фазовому просторі $\Delta\vec{V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$.

Визначимо швидкість при довільному русі. Довільність руху означає, що змінюється не лише відстань від початку координат до матеріальної точки, тобто довжина *r(t)* радіус-вектора $\vec{r}(t)$, який визначає положення матеріальної точки в координатному просторі. Довільність руху означає, що довільним чином змінюється також і його орієнтація у просторі, тобто $\vec{r}(t) = \vec{e}_r(t)\,r(t)$. Швидкість матеріальної точки визначається шляхом диференціювання вектора $\vec{r}(t)$ за часом:

$$\vec{V} = d\vec{r} \,/\, dt. \tag{1.1.13}$$

Визначимо прискорення при довільному криволінійному русі. При такому русі змінюється напрямок вектора швидкості та абсолютне значення швидкості. Тому слід записати: $\vec{V}(t) = \vec{e}_\tau(t)V(t)$, де одиничний вектор $\vec{e}_\tau$ орієнтовано вздовж дотичної до траєкторії руху. Тоді вектор прискорення складатиметься з двох доданків:

$$\vec{a} \equiv d\vec{V} / dt = d\,[\vec{e}_\tau(t)V(t)] \,/\, dt$$

$$= \vec{e}_\tau(t)dV / dt + V(t)d\vec{e}_\tau / dt. \tag{1.1.14}$$

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно, то напрямок вектора швидкості та орта $\vec{e}_\tau(t)$ лишається незмінним, $d\vec{e}_\tau / dt = 0$. За цих умов $\vec{a} = \vec{a}_\tau = \vec{e}_\tau dV / dt$, де $\vec{a}_\tau$ – це ***тангенціальне прискорення***, яке орієнтовано вздовж дотичної до траєкторії руху (при цьому воно направлене паралельно або антипаралельно вектору швидкості в залежності від знака похідної dV / dt), швидкість змінюється лише за абсолютною величиною.

Якщо ж матеріальна точка рухається зі сталою за абсолютною величиною швидкістю $dV / dt = 0$, то його траєкторію можна уявно поділити на безкінечно короткі дуги. Рух по колу вивчено у попередньому підрозділі. При ньому прискорення має напрямок до центра кола, елементом якого є дана дуга і яке можна вписати в дану траєкторію руху так, щоб воно торкалося траєкторії саме в тій точці, де в даний момент часу обчислюється ***повний вектор прискорення.*** Отже, абсолютна величина прискорення матеріальної точки, що рухається по колу зі сталим модулем швидкості, дорівнює: $\vec{a} = \vec{a}_{норм} = -\vec{e}_R V^2 / R$, тут $\vec{a}_{норм}$ – це ***нормальне прискорення***, яке ще називають доцентровим.

Таким чином, при довільному русі у прискорення є дві складові: тангенціальне прискорення та нормальне прискорення:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_{норм}. \tag{1.1.15}$$

1.1.5. Типові задачі кінематики

Для розв’язання задач з кінематики слід мати базові знання з математичного аналізу та аналітичної геометрії. Кінематика базується на застосуванні прямої та зворотної задачі диференціального числення, оскільки основні параметри, які описують механічний рух в кінематичному наближенні, пов’язано між собою диференціальним чином, наприклад, для прямолінійного руху вздовж осі $\vec{z}$: $V_z = dz / dt$, $a_z = dV_z / dt = d^2z / dt^2$. Тому з точки зору математики при розв’язанні таких задач потрібно для певної відомої функції або знайти похідну функцію, або первісну функцію. З курсу аналітичної геометрії для розв'язання задач з механіки обов'язково слід знати, що таке скалярний та векторний добутки векторів. У третьому розділі даного підручника наведено таблицю даних про похідні та первісні функції, якими найчастіше описують механічний рух, та про основні операції з векторами.

У загальному випадку механічний рух описується в термінах тензорів (в даному курсі це величини від нульового до другого рангу). Тензор нульового рангу – це скаляр, тобто одне число, що описує таку величину, значення якого не залежить від вибору системи координат. Тензор першого рангу – це вектор, тобто в загальному випадку три числа, що описують таку величину, наприклад, три проекції вектора на осі ортонормованого базису у тривимірному координатному просторі (якщо рух відбувається у дво- або одновимірному просторі, то відповідні проекції, звичайно, дорівнюють нулю, що спрощує задачу). Тензор другого рангу можна записати як двовимірну матрицю: такими величинами є, наприклад, тензор інерції абсолютно твердих тіл та тензор механічного напруження, яке виникає в середовищі, зокрема через наявність внутрішнього тертя.

Задача 1

Дано: Матеріальна точка рухається прямолінійно зі швидкістю $V(t)=V_0\sin(\alpha t)$, де V_0 та α – сталі додатні величини. Початкова умова: $x(t=0)=0$.

Знайти: прискорення *a(t)*, координату *x(t)*, пройдений шлях *S(t)*.

Розв'язання:

Прискорення – це похідна від швидкості за часом: $a(t)=dV/dt=\alpha V_0\cos(\alpha t)$. Зверніть увагу, що екстремальним значенням швидкості відповідають нульові значення прискорення.

Координату знаходимо шляхом інтегрування: $x(t)=\int V(t)dt=C-V_0\alpha^{-1}\cos(\alpha t)$, де C – константа інтегрування, фізичний сенс якої – це значення координати в певний момент часу. Знайти її можна з початкових умов: $x(0)=0\Rightarrow 0=-V_0/\alpha+C$. Отже, явний вигляд залежності координати від часу є таким: $x(t)=-V_0\alpha^{-1}\cos(\alpha t)+V_0/\alpha$.

Зверніть увагу, що: $V(t)>0$, коли $x(t)$ зростає, та, відповідно, $V(t)<0$, коли $x(t)$ зменшується; моментам обнуління значення швидкості відповідають ті моменти часу, коли $x(t)$ має якесь екстремальне значення. Слід додати, що графік $x(t)$ має бути неперервним та достатньо гладким, щоб можна було обчислити похідну від координати за часом.

Пройдений шлях визначається як інтеграл від модуля швидкості за часом: $S(t)=\int|\vec{V}|dt$. В нашому випадку $S(t)=\alpha^{-1}\int|\vec{V}|d(t\alpha)$. Відзначимо, що *S(t)* – це функція, яка з часом не зменшується, вона може бути, в крайньому випадку, незмінною величиною, якщо тільки в цей проміжок часу швидкість дорівнює нулю, тобто матеріальна точка при цьому не рухається. Таким чином, графік пройденого шляху співпадає з графіком $x(t)$ в ті проміжки часу, коли координата не зменшується, та є дзеркальним відображенням графіка $x(t)$ відносно горизонтальної осі часу, коли координата зменшується з часом.

Задача 2

Дано: дві матеріальні точки одночасно почали рух в спільній вертикальній площині в полі тяжіння. При цьому: значення їхніх швидкостей було однаковим за модулем $V_0=20$ *м/с*, рух почався з однієї координатної точки під кутами $\alpha_1=90°$ та $\alpha_2=60°$ до горизонту, відповідно.

Знайти: відстань між цими матеріальними точками через $\tau=2с$, нехтуючи силами тертя.

Розв'язання:

Введемо систему координат, початок якої пов'язано з початковим розташуванням даних матеріальних точок. Вісь абсцис зорієнтуємо паралельно горизонту, а вісь ординат – вертикально вгору.

Розглянемо рух першої матеріальної точки, для неї: $\vec{V}_0\,||\,\vec{e}_y;$ тому її швидкість $V_1=V_0-gt$, а координата $y_1=V_0t-gt^2/2$.

Для другої матеріальної точки швидкість має дві складові; одну – вздовж осі $\vec{x}$: $V_{2x} = V_0 \cos\alpha_2$, а другу – вздовж осі $\vec{y}$: $V_{2y} = V_0 \sin\alpha_2 - gt$.

Шляхом інтегрування, враховуючи початкової умови $\vec{r}_2(t=0)=0$, знайдемо вираз для двох проекцій вектора $\vec{r}_2(t)$ на осі координат: $x_2 = V_0 t \cos\alpha_2$ та $y_2 = V_0 t \sin\alpha_2 - gt^2/2$. Відстань між двома точками в координатному просторі визначається за теоремою Піфагора: $L = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ $= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Підставимо сюди знайдені вирази для координат досліджуваних точок:

$$L(\tau) = \sqrt{V_0^2\tau^2\cos^2\alpha_2 + V_0^2\tau^2(1-\sin\alpha_2)^2} =$$

$$V_0\tau\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx V_0\tau\sqrt{2-1.7} \approx V_0\tau\sqrt{0.3} \approx V_0\tau/2 \approx 20\,м. \quad (1.1.16)$$

Звертаємо увагу, що відстань знайдено приблизно, з точністю, яка визначається точністю величин, що задані в умові задачі.
Відповідь: $L(\tau) \approx 20\,м$.

Задача 3

Дано: з пункту А, що знаходиться на шосе, потрібно потрапити до пункту В, який розташовано у полі. Відстань від пункту В до шосе дорівнює l ($DB = l$). Швидкість руху по полю в *N* разів менша за швидкість руху по шосе.
Знайти: в якій точці С, що знаходиться на шосе між точками А та D, слід з'їхати з шосе у поле, щоб потрапити з пункту А до пункту В за мінімальний час?
Розв'язання:

Намалюємо схему руху та оберемо зручну систему координат, яка пов'язана з шосе. Введемо позначки: $V_ш$ – це швидкість руху по шосе, $t_{AB} = t_1 + t_2$ – це час руху від *A* до *B*, він складається з інтервалів руху по шосе та по полю, відповідно:

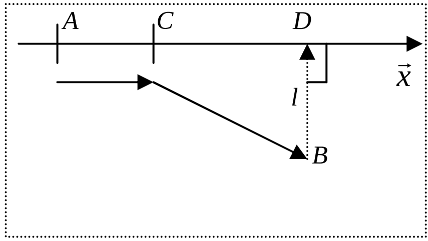

Рис. 1.1.3 (до задачі 3)

$t_1 = AC/V_ш$ – це час руху по шосе, $t_2 = \sqrt{CD^2 + l^2}\,/(V_ш/N)$ – це час руху по полю.

Ця задача є типовою задачею на знаходження екстремальних значень. Тому здобудемо аналітичний вираз для повного часу руху від точки *A* до точки *B*, а потім обчислимо похідну від t_{AB} за довжиною відстані CD. Те значення $CD = CD_*$, яке обнулить цю похідну, і буде оптимальним, тобто відповідатиме мінімальному значенню t_{AB}. Отже:

$$t_{AB} = \frac{AC}{V_ш} + N\frac{\sqrt{CD^2+l^2}}{V_ш} = \frac{AD - CD + N\sqrt{CD^2+l^2}}{V_ш}, \quad (1.1.17)$$

$$\frac{dt_{AB}}{d(CD)} = -\frac{1}{V_ш} + \frac{d}{d(CD)}\frac{N}{V_ш}\sqrt{CD^2+l^2} = \frac{N}{V_ш}\frac{CD}{\sqrt{CD^2+l^2}} - \frac{1}{V_ш}, \quad (1.1.18)$$

$$\left.\frac{dt_{AB}}{d(CD)}\right|_{optim} = 0; \quad \frac{N \cdot CD_*}{\sqrt{CD_*^2 + l^2}} - 1 = 0; \quad (1.1.19)$$

$$N^2 CD_*^2 = CD_*^2 + l^2; \quad CD_* = l/\sqrt{N^2 - 1}. \quad (1.1.20)$$

Таким чином, довжина CD_* визначається відстанню l від пункту *B* до шосе, а також співвідношенням між швидкостями руху по шосе та по полю N. Зростання величини l та наближення $N \to 1$ призводить до збільшення довжини CD_*, тобто точка повороту відсувається ближче до стартової точки *A*. При цьому слід розуміти, що точка повороту з шосе на поле не може бути розташована лівіше за стартову точку, тому за умови $l/\sqrt{N^2 - 1} > AD$ з шосе слід з'їжджати одразу.

1.1.6. Абсолютно тверде тіло

Окрім такого фізичного об’єкта, як матеріальна точка, іншим добре дослідженим об’єктом в механіці є «абсолютно тверде тіло». Абсолютно тверде тіло – це сукупність матеріальних точок, відстань між якими не змінюється в процесі руху. Цей термін вводиться, зокрема, для описання обертального руху механічного об’єкта навколо певної осі. Одна матеріальна точка, її положення в координатному просторі описується трьома незалежними скалярними функціями $x(t), y(t), z(t)$, або як говорять: одна матеріальна точка має три ступені вільності. Кількість ступенів вільності дорівнює кількості незалежних узагальнених координат (незалежних функцій або незалежних змінних), які належить задати, щоб охарактеризувати положення механічного об’єкта у просторі. Дві матеріальні точки, відстань між якими є фіксованою, мають п’ять ступенів вільності, N незв’язаних матеріальних точок мають $3N$ ступені вільності. А абсолютно тверде тіло (це, як мінімум, три матеріальні точки, що лежать не на одній прямій) має шість ступенів вільності (з них три, наприклад, – це координати центра мас, а ще три – це кути, що визначають просторову орієнтацію абсолютно твердого тіла).

1.1.7. Поступальний рух абсолютно твердого тіла

Всі точки абсолютно твердого тіла при поступальному русі переміщуються з часом за однаковими траєкторіями. Будь-яка пряма, що проведена між двома точками абсолютно твердого тіла, при такому русі пересувається паралельно сама собі. Орієнтація абсолютно твердого тіла у просторі при цьому не змінюється. У кінематичному відношенні поступальний рух абсолютно твердого тіла є еквівалентним руху матеріальної точки. У цьому випадку траєкторії руху усіх точок абсолютно твердого тіла є взаємно паралельними. Тому такий рух абсолютно твердого тіла повністю визначено, якщо задано рух однієї з його точок. Щоб описати такий рух, досить трьох ступенів вільності.

1.1.8. Плоский рух абсолютно твердого тіла

Плоским називають такий рух абсолютно твердого тіла, при якому траєкторії усіх матеріальних точок, що його складають, лежать в паралельних площинах. У цьому випадку абсолютно тверде тіло має три ступені вільності: дві координати задають положення, наприклад, центра мас абсолютно твердого тіла на площині, ще одна координата задає кут, на який абсолютно тверде тіло повернено відносно осі, що є перпендикулярною до площини і проходить крізь центр мас.

Доведемо теорему Ейлера про те, що в процесі плоского руху абсолютно твердого тіла його переміщення з початкового положення в інше довільне положення може бути виконано за допомогою одного тільки повороту навколо певної осі. Для цього розглянемо плоский рух стрижня. Вибір такого об’єкта дослідження обумовлено тим, що при плоскому русі замість довільного абсолютно твердого тіла достатньо слідкувати за рухом двох будь-яких його точок.

Нехай стрижень AB (див. рис. 1.1.4) перейшов з початкового положення у положення A_1B_1. З’єднаємо точку A з точкою A_1, а точку B – з B_1. Потім проведемо серединні перпендикуляри відрізків AA_1 та BB_1. Ці серединні перпендикуляри перетинаються у точці O. Точка O є однаково віддаленою від точок A та A_1: $OA=OA_1$, а також від B та B_1: $OB=OB_1$. Тобто точки A та A_1 лежать на одному колі з центром в точці O, так само, як точки B та B_1 лежать на іншому колі з центром в тій самій точці O. З рівності трикутників OAB та OA_1B_1 випливає, що кути $\angle AOA_1$ та $\angle BOB_1$ є також

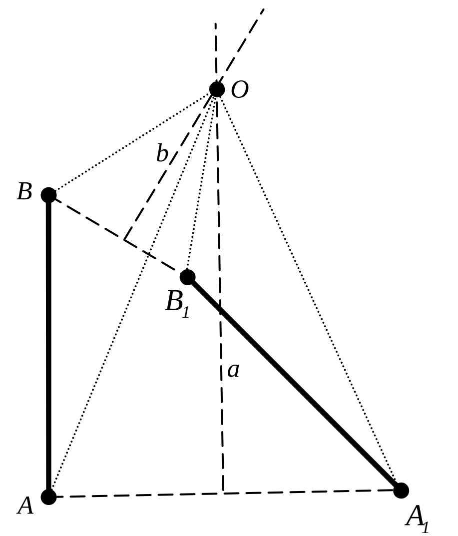

Рис. 1.1.4. Схема знаходження миттєвої осі обертання

рівними. Отже, відрізок *AB* можна повернути навколо осі *O* так, щоб точка *A* опинилася у точці A_1.

Отже, плоский рух у певній площині можна описати як обертання навколо певної осі, що є перпендикулярною до цієї площини. В такий спосіб ми довели існування миттєвої осі обертання: в цій задачі вона є перпендикулярною до площини рисунка і проходить крізь точку *O*.

1.1.9. Миттєва вісь обертання

Довільний рух абсолютно твердого тіла у площині можна уявити як суперпозицію поступального та обертального рухів. До того ж цю суперпозицію можна виконати у безкінечну кількість способів. Але кут обертання не залежить від вибору варіанта суперпозиції (від вибору положення осі обертання). Будь-яку вісь, що є перпендикулярною до площини руху, можна розглядати як вісь обертання. Миттєвою віссю обертання є та з них, для якої поступальна швидкість в даний момент дорівнює нулю. Швидкість усіх точок абсолютно твердого тіла у будь-який момент часу можна уявити як швидкість обертання навколо миттєвої осі. З плином часу положення миттєвої осі обертання змінюється відносно абсолютно твердого тіла та відносно обраної системи координат. Миттєва вісь обертання є уявним об'єктом, вона не має матеріального носія. Фізичне значення має не швидкість руху цієї осі відносно якоїсь системи відліку, а те, що усі точки абсолютно твердого тіла, що лежать в даний момент на цій осі, знаходяться у стані спокою, що рух абсолютно твердого тіла можна звести до обертання навколо цієї осі.

1.1.10. Абсолютний характер кутової швидкості при довільному плоскому русі абсолютно твердого тіла

Оберемо в абсолютно твердому тілі довільну точку *O*. Нехай у даний момент часу вона рухається зі швидкістю $\vec{V}_0$, а саме абсолютно тверде тіло обертається із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$ навколо осі, що є перпендикулярною до площини, в якій відбувається рух, і проходить крізь точку *O*. Довільний плоский рух

абсолютно твердого тіла можна уявити як суперпозицію поступального (зі швидкістю $\vec{V}_0$) та обертального (із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$) рухів. Тобто для швидкості довільно обраної точки *A*, що належить до твердого тіла, маємо такий вираз:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad (1.1.21)$$

де $\vec{r}$ – це радіус-вектор, що проведено з точки *O* до точки *A*. При цьому величина $\vec{\omega}$ не залежить від вибору точки *O*. У цьому і полягає ***абсолютний характер*** кутової швидкості.

Доведемо це твердження. Оберемо іншу точку O_1 та будемо описувати довільний плоский рух, спираючись на її характеристики: лінійну $\vec{V}_1$ та кутову $\vec{\omega}_1$ швидкості. Тоді для точки *A*, радіус-вектор якої відносно точки O_1 дорівнює $\vec{r}_1$, маємо:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_1 + [\vec{\omega}_1, \vec{r}_1]. \quad (1.1.22)$$

Різницю між радіусами-векторами точки А відносно точок O_1 та *O* позначимо $\vec{R}$ так, що $\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{R}$ (див. рис. 1.1.5):

$$\vec{V}_A = \vec{V}_1 + [\vec{\omega}_1, \vec{r}_1] = \vec{V}_1 + [\vec{\omega}_1, \vec{r}] + [\vec{\omega}_1, \vec{R}]. \quad (1.1.23)$$

Крім того, точку *O* нічим не виділено серед інших точок абсолютно твердого тіла, тому для неї аналогічно до (1.1.22) також можна записати:

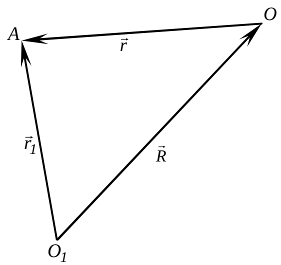

Рис. 1.1.5. До доведення абсолютного характеру кутової швидкості обертання

$$\vec{V}_0 = \vec{V}_1 + [\vec{\omega}_1, \vec{R}]. \quad (1.1.24)$$

Скористаємося цим для виключення першого і третього доданків в (1.1.23):

$$\vec{V}_A = \vec{V}_0 + [\vec{\omega}_1, \vec{r}]. \quad (1.1.25)$$

Порівнюючи вирази (1.1.21) та (1.1.25) для швидкості $\vec{V}_A$, здобуваємо рівняння $\left[\vec{\omega}_1, \vec{r}\right] = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right]$. Оскільки точки O та A вибрано у довільний спосіб, то $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$. Саме у цьому і полягає математичний вираз фізичного твердження про абсолютний характер кутової швидкості обертального руху.

Питання для самоконтролю до розділу § 1.1. Кінематика матеріальної точки

1. Що означає "задати систему відліку"?
2. Що таке «матеріальна точка»?
3. Що таке «кількість ступенів вільності механічної системи»?
4. Що таке «радіус-вектор»?
5. Що таке «траєкторія»?
6. Чим відрізняється «шлях, який пройдено» від «переміщення»?
7. Як визначається швидкість за відомою залежністю радіус-вектора від часу?
8. Як визначається прискорення за відомою залежністю швидкості від часу?
9. Як визначається швидкість за відомою залежністю прискорення від часу?
10. Як визначається положення матеріальної точки за відомою залежністю швидкості від часу?
11. Що таке «нормальне прискорення»?
12. Що таке «дотичне прискорення»?
13. Що таке «годограф швидкості»?
14. Що таке «абсолютно тверде тіло»?
15. Який рух абсолютно твердого тіла називається плоским?
16. Який рух абсолютно твердого тіла називається поступальним?

§ 1.2. Динаміка матеріальної точки

Динаміка вивчає механічний рух з позиції встановлення причин, з яких цей рух відбувається та чому він змінюється.

Домовимося спочатку про вибір системи відліку. Один і той самий механічний рух виглядає по-різному відносно різних систем відліку (або відносно різних механічних об’єктів). Разом із тим вибір системи відліку дослідником є довільним, що означає рівноправність різних систем відліку. Тому спроба обрати таку систему відліку, в якій механічний рух виглядав би та описувався б математичними формулами в найбільш простий спосіб, виглядає природною. Для знаходження такої системи відліку розглянемо механічний об’єкт, який знаходиться настільки далеко від інших механічних об’єктів, що вони не впливають на його рух. Такий об’єкт називають вільною матеріальною точкою. Звичайно, умови вільного руху на практиці реалізувати можна тільки приблизно, але принципово можна уявити собі такі умови, які забезпечують вільний рух матеріальної точки з потрібною точністю.

Вільний рух, як і решта типів механічного руху, виглядає в різний спосіб у різних системах відліку. Але якщо в якості системи відліку обрати систему, що пов’язана з певною вільною матеріальною точкою, то в такій системі відліку вільний рух виглядатиме дуже просто: це буде рівномірний прямолінійний рух. Це твердження складає зміст ***закону інерції***, який встановив Галілей. Система відліку, що пов’язана з вільною матеріальною точкою, називається ***інерціальною системою відліку.***

Цікаво, що введення інерціальної системи відліку як такої, що характеризується такими специфічними властивостями, однаково не дозволяє ввести стани абсолютного спокою, абсолютного руху та абсолютного простору. Справа в тім, що інерціальних систем відліку існує нескінченна кількість. Дійсно: будь-яка система відліку, що рухається прямолінійно та рівномірно відносно інерціальної системи відліку, також є інерціальною системою відліку. Вивчаючи вільний рух, неможливо відрізнити різні інерціальні системи відліку. Більше того: всі фізичні явища відбуваються в різних інерціальних системах відліку в подібний спосіб. Всі закони природи мають однаковий вигляд в різних інерціальних системах відліку. Тому всі інерціальні системи відліку є еквівалентними (тобто такими, що їх не можна ніяким фізичним способом відрізнити одну від одної). Цей постулат про інерціальні системи відліку, що є одним із фундаментальних у механіці, називають ***принципом відносності руху***.

Звичайно, існування інерціальних систем відліку не обмежує право дослідника обрати будь-яку іншу систему відліку: просто в усіх інерціальних системах відліку закони механіки формулюються однаково та в найбільш простий спосіб. Тому надалі ми вивчатимемо механічний рух саме відносно інерціальних систем відліку, і тільки наприкінці семестру один з розділів даного курсу буде присвячено спеціально механічному руху відносно неінерціальних систем відліку, які рухаються з прискоренням відносно інерціальних систем відліку.

1.2.1. Фізичні величини, якими оперує розділ "Динаміка матеріальної точки"

На додаток до основних термінів, якими оперує кінематика при описанні механічного руху, в динаміці вводяться ще три основні терміни: маса, імпульс, сила.

Маса – це міра інертності механічних об'єктів. Вона характеризує властивість тіл опиратись зміні їхньої швидкості. Що більша маса тіла, то менше змінюється його швидкість за однакових інших умов. Якщо вести мову про певний еталон маси, наприклад, $m_0 = 1\,кг$, то це є маса одного літра чистої води при $t=4^\circ\ C$. Тоді невідому масу можна експериментально визначити через дослід із взаємодії невідомої m та еталонної m_0 мас: $m = m_0 V_0 / V$, де V_0 та V – це швидкості еталонної та невідомої мас, відповідно, які набуто внаслідок їхньої взаємодії.

Імпульс – це добуток маси матеріальної точки на її швидкість: $\vec{p} = m\vec{V}$. В процесі руху вільної матеріальної точки її імпульс в інерціальних системах відліку залишається незмінним. Якщо ж матеріальна точка взаємодіє з іншими матеріальними точками, то швидкості взаємодіючих матеріальних точок з часом змінюються, але при цьому зміни швидкостей взаємодіючих матеріальних точок пов'язані між собою в певний спосіб.

Замкненою системою матеріальних точок (або замкненою механічною системою) називають сукупність матеріальних точок,

які взаємодіють тільки між собою та не взаємодіють із зовнішніми механічними об'єктами. Для замкнених систем існує низка таких величин, які визначаються через імпульс, і при цьому не змінюються з часом. Наприклад, не змінюється з часом повний (сумарний) вектор імпульсу замкненої системи. Тому поняття про імпульс та його властивості є дуже важливими в задачах про динаміку системи матеріальних точок.

Сила – це фізична величина, яка характеризує інтенсивність взаємодії механічних об'єктів. Силу (англійською *force*) зазвичай позначають як $\vec{F}$. Унаслідок взаємодії тіл з фізичними об'єктами, що їх оточують, відбувається зміна імпульсу цих тіл. Тому інтенсивність взаємодії між даними тілами та фізичними об'єктами оцінюють по тому, як змінюється імпульс тіл внаслідок цієї взаємодії. Вимірюючи зміну імпульсу тіла $\Delta\vec{p}$ протягом фізично короткого проміжку часу Δt, можна визначити величину і напрямок сили, яка діє на тіло: $\vec{F} = lim_{\Delta t \to 0}\, \Delta\vec{p} / \Delta t$. На цьому принципі побудовано дію приладу, яким вимірюють силу, – динамометра.

Швидкості механічних рухів у класичній механіці є дуже малими порівняно зі швидкістю світла, тому у цьому наближенні можна вважати, що механічна взаємодія відбувається просто миттєво.

В усіх механічних явищах взаємодію обумовлено двома типами сил: гравітаційними та електромагнітними (детально про класифікацію взаємодій дивись розділ 1.4). Сила гравітації визначає інтенсивність, з якою усі механічні об'єкти притягуються один до одного в залежності від відстані між ними. Інші сили у задачах класичної механіки мають електромагнітну природу: це – сили пружності та тертя (сили інерції виникають у неінерціальних системах відліку – дивись розділ 1.5). Для визначення інтенсивності цих двох сил у механіці використовують феноменологічний підхід: моделюють аналітичні вирази для них за результатами експериментів.

1.2.2. Закони Ньютона

Теоретичну основу класичної механіки складають три закони Ньютона.

Перший закон Ньютона стверджує: «Існують такі системи відліку, що називаються інерціальними, в яких матеріальна точка або перебуває у стані спокою, або рухається прямолінійно та рівномірно, якщо векторна сума всіх зовнішніх сил, що діють на матеріальну точку, дорівнює нулю».

Другий закон Ньютона визначає, що: «В інерціальних системах відліку швидкість зміни імпульсу матеріальної точки з часом дорівнює векторній сумі усіх зовнішніх сил, що діють на дану матеріальну точку, $d\vec{p}\,/\,dt = \sum\limits_j \vec{F}_j^{\,зовн}$ ».

Третій закон Ньютона свідчить, що: «Взаємодія матеріальних точок між собою відбувається в такий спосіб, що сила $\vec{F}_{12}$, з якою перша матеріальна точка діє на другу матеріальну точку, є зв'язаною з силою $\vec{F}_{21}$, що діє з боку другої матеріальної точки на першу, наступним співвідношенням: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$».

Осмислення першого закону Ньютона дозволяє дійти висновку, що це є дещо розширений варіант ***закону інерції Галілея***. Важливим в цьому законі є вказівка на векторний характер сил, що саме за умови рівності нулю результуючої сили (як векторної суми усіх зовнішніх сил) можливим стає реалізація рівномірного прямолінійного руху матеріальних точок. З іншої точки зору, цей закон Ньютона можна розглядати як частинний випадок другого закону Ньютона, якщо не брати до уваги вказівку на інерціальність систем відліку, в яких є справедливими закони Ньютона. Слід також узяти до уваги історичний аспект значення першого закону Ньютона. До Ньютона у фізиці панувала інша точка зору, яка йшла ще з учення Аристотеля: «Механічний об'єкт рухається тільки внаслідок дії зовнішньої сили. Якщо $\vec{F}_{рез} = 0$, то і швидкість його $\vec{V} = 0$». Це, на перший погляд, співпадає з повсякденним побутовим досвідом, але насправді є помилковим враженням.

Використовуючи другий закон Ньютона для розв'язання задач з механіки, потрібно пам'ятати, що він є справедливим для

інерціальних систем відліку, динаміка руху матеріальних точок відносно неінерціальних систем відліку описується іншим законом. З векторного характеру другого закону Ньютона (тобто через те, що $d\vec{p}\,/\,dt = \sum\limits_j \vec{F}_j^{\,зовн}$) випливає ***принцип незалежності механічних рухів***. Сутність цього принципу полягає в тому, що, розписуючи другий закон Ньютона у вигляді трьох скалярних рівнянь, стає видно, що зміна імпульсу вздовж певної осі координат залежить тільки від суми тих сил, що мають складові саме вздовж цієї осі, але не залежить від суми інших сил, що мають ненульові значення проекції на інші осі даної системи координат. Особливо слід підкреслити, що другий закон Ньютона ні в якому разі не є визначенням сили. Це фундаментальний закон механіки, бо:

1) у визначенні йдеться про одну силу, а в другому законі Ньютона важливою обставиною є присутність суми усіх зовнішніх сил,

2) другий закон Ньютона передбачає адитивність мас. Це, на перший погляд, здається очевидним, але нагадаємо, що всі теоретичні твердження стосовно властивостей природи потребують перевірки на справедливість різними незалежними експериментами.

Другий закон Ньютона може бути використаний: по-перше, для розв'язання задач динаміки, якщо відомо, як $\vec{F}_{рез}$ залежить від координат взаємодіючих механічних об'єктів, а по-друге, для доведення ***закону збереження повного імпульсу замкненої системи матеріальних точок***.

Третій закон Ньютона свідчить, що сума усіх внутрішніх сил, що діють у замкненій системі, дорівнює нулю: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... = 0$. Це просте рівняння виражає фундаментальний принцип механіки: «Механічні об'єкти взаємодіють між собою так, щоб їхня енергія була мінімальною, тобто $\sum\limits_j \vec{F}_j^{\,внут} = 0$». Аналізуючи третій закон Ньютона, приходимо до висновку, що внутрішні сили не є причиною руху системи матеріальних точок. Саме наявність зовнішньої сили $\vec{F}^{\,зовн} \neq 0$ призводить до руху системи матеріальних точок.

Таким чином, усі три закони Ньютона є взаємно пов’язаними та складають теоретичну базу, на якій побудовано класичну механіку.

1.2.3. Методика розв`язання задач динаміки механічного руху

Можна виділити два основні методи розв`язання задач з динаміки руху матеріальної точки. Перший метод полягає в прямому інтегруванні другого закону Ньютона за умов, коли відома залежність зовнішньої результуючої сили від координат та часу, якщо така існує, а також дві початкові умови: на швидкість та координату. Другий метод полягає у використанні законів збереження (законів збереження імпульсу та енергії).

Задача 1

Дано: Конічний маятник – це тіло маси *m*, яке підвісили на ідеальній (невагомій) мотузці довжиною *L*, що не розтягується; його розміри є нехтовно малими порівняно з розмірами траєкторії руху. Конічний маятник рівномірно рухається по колу відносно вертикальної осі, що проходить крізь точку підвісу. Силами тертя можна знехтувати.
Знайти: період обертання конічного маятника
Розв`язання:

Намалюємо рисунок, що показує в обраній системі координат (вигляд маятника збоку представлено на рис. 1.2.1) напрямки дії усіх зовнішніх сил. На рис. 1.2.1 позначено: *R* – радіус траєкторії, $R = L\sin\Theta$, кут Θ відраховується від вертикалі до мотузки, на якій коливається маятник.

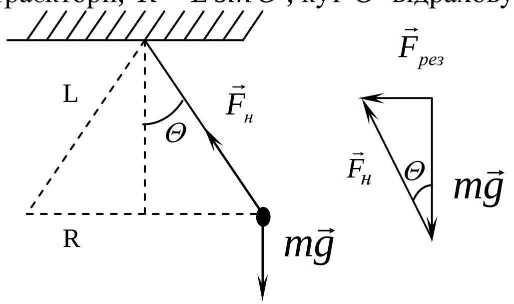

Рис. 1.2.1 (до задачі 1)

Оскільки в напрямку руху маятника ніякі сили не діють, то лінійна швидкість маятника є незмінною за модулем: $V = const$; а отже, і кутова

швидкість є сталою: $\omega = d\varphi / dt = const$.

Визначимо сили, що діють на маятник. Оскільки маятник рухається в полі тяжіння Землі, то одна з цих сил – це сила тяжіння $m\vec{g}$, що діє вертикально вниз. Інший об’єкт, з яким взаємодіє маятник, – це мотузка, на якій його підвішено, тому друга сила – це сила натягу мотузки $\vec{F}_н$, що діє вздовж мотузки. Оскільки за умовами задачі немає інших об’єктів, з якими взаємодіє маятник, то немає й інших сил.

Оскільки за умовами задачі маятник рівномірно рухається по колу, то його прискорення, а отже і результуюча сила, спрямовані до центра (горизонтально). Це дає можливість побудувати трикутник сил (див. рис. 1.2.1), з якого знаходимо зв’язок результуючої сили та сили тяжіння:

$$F_{рез} = mg\,tg\Theta . \qquad (1.2.1)$$

Проекція другого закону Ньютона на радіальний напрямок має вигляд:

$$F_{рез} = ma , \qquad (1.2.2)$$

де доцентрове прискорення дорівнює

$$a = \omega^2 R = \omega^2 L\sin\Theta . \qquad (1.2.3)$$

Після підстановки явних виразів (1.2.1) та (1.2.3) до другого закону Ньютона (1.2.2) дістаємо: $g\cdot tg\Theta = \omega^2 L\cdot\sin\Theta$, звідки $\omega^2 = g / L\cos\Theta$. Оскільки $\omega T = 2\pi$, то для періоду коливань маємо:

$$T = 2\pi\sqrt{L\cos\Theta / g} . \qquad (1.2.4)$$

Проаналізуємо здобутий вираз (1.2.4). Період конічного маятника є тим більший, чим довша мотузка, а також чим більший $\cos\Theta$ (тобто, чим менший Θ). Це зрозуміло: що швидше рухається маятник, то більший кут Θ, а період є зворотно пропорційним до швидкості. При $\Theta = 0$ з (1.2.4) дістаємо знайомий зі шкільного курсу вираз для періоду математичного маятника, тому цього разу не будемо перевіряти кінцеву формулу на розмірність. Але нагадаємо про високу ефективність і простоту цього методу перевірки справедливості тих чи інших формул.

Відповідь: $T = 2\pi\sqrt{L\cos\Theta / g}$.

Задача 2

Дано: Матеріальна точка падає з висоти h на абсолютно гладку пружну площину, яка утворює кут $\alpha \le \pi/4$ з рівнем горизонту.
Знайти: траєкторію руху матеріальної точки після пружного відбиття від даної похилої площини, нехтуючи опором повітря.
Розв`язання:

Намалюємо рисунок, що відображує геометрію задачі (див. рис.1.2.2). Оберемо Декартову систему координат. Покажемо на рис. 1.2.2 напрямки швидкостей при вертикальному падінні та одразу після пружного відбиття, напрямок дії єдиної зовнішньої сили – сили тяжіння $m\vec{g}$.

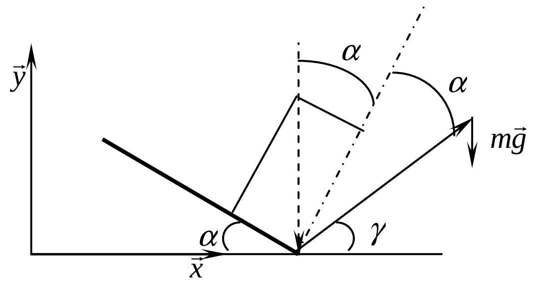

Рис. 1.2.2 (до задачі 2)

Оскільки відбулося абсолютно пружне відбиття, то кути між напрямками швидкостей та нормаллю до похилої площини перед та після удару мають бути однаковими. Тобто кут відбиття та кут падіння дорівнюють α . З аналізу рисунка видно, що утворилося два прямі кути: перший, похила площина-нормаль до неї; другий, вертикаль-рівень горизонту. Далі можна зробити висновок: сума двох кутів α та невідомого кута γ складає $\pi/2$, тому $\gamma = \pi/2 - 2\alpha$.

Щоб розв`язати задачу про траєкторію польоту після відбиття матеріальної точки від похилої площини, слід спочатку знайти величину швидкості V_0 , з якою матеріальна точка падає на похилу площину. Бо саме з таким модулем швидкості і почнеться рух матеріальної точки після її відбиття від похилої площини.

Це можна зробити в два способи: скориставшись законом збереження механічної енергії (це найпростіший спосіб) або

застосувавши другий закон Ньютона (це потребуватиме обчислення двох інтегралів, що корисніше для практики з використання методів математичного аналізу). З закону збереження енергії: $mgh = mV_0^2/2$, отже, $V_0 = \sqrt{2gh}$ це є та швидкість, з якою матеріальна точка впала на похилу площину. Продемонструємо еквівалентність обох підходів. Тоді з другого закону Ньютона (в скалярній формі, проекція на вісь ординат): $mdV/dt = gm$, $\int\limits_0^{V_0} dV = \int\limits_0^{\tau} gdt;$ де τ – це час падіння матеріальної точки. Після інтегрування маємо: $g\tau = V_0$. Зміна нормальної координати описується рівнянням: $dy/dt = V$. Після обчислення інтеграла: $\int\limits_0^{h} dy = \int\limits_0^{\tau} gtdt$ отримаємо: $h = g\tau^2/2,$ але $g\tau = V_0$. Отже, $V_0 = \sqrt{2gh}$. Тобто, незалежно від обраного методу, здобуто один і той самий результат: початкова швидкість польоту матеріальної точки після її відбиття від пружної похилої площини дорівнює $V_0 = \sqrt{2gh}$.

Після відбиття рух матеріальної точки описується другим законом Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_{рез}$, при цьому результуюча сила є силою тяжіння: $\vec{F}_{рез} = -\vec{e}_y mg$. Спроектуємо рівняння руху на осі обраної системи координат:

$$\begin{cases} \textit{вісь} \quad \vec{x}: \quad ma_x = 0, \\ \textit{вісь} \quad \vec{y}: \quad ma_y = -mg, \end{cases} \tag{1.2.5}$$

інтегруємо цю систему:

$$\begin{cases} \int a_x dt = const. \\ \int a_y dt = -\int gdt. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Отже, проекція швидкості на горизонтальну вісь координат $V_x = \int a_x dt = V_{x0}$ дорівнює початковому значенню проекції швидкості на вісь $\vec{X}$; в подібний спосіб знайдемо проекцію швидкості на вертикальну вісь координат: $V_y = V_{y0} - gt$, де V_{y0} – це початкове значення проекції швидкості на вісь $\vec{Y}$. Повне значення швидкості матеріальної точки на початку руху: $V_0 = \sqrt{V_{x0}^2 + V_{y0}^2}$. Проінтегруємо знайдені вирази для проекцій швидкостей та знайдемо залежність відповідних координат матеріальної точки від часу:

$$\begin{cases} V_y = dy/dt; \\ V_x = dx/dt; \end{cases} \begin{cases} \int dy = \int V_y dt; \\ \int dx = \int V_x dt; \end{cases} \begin{cases} y = y_0 + V_{y0}t - gt^2/2; \\ x = x_0 + V_{x0}t. \end{cases} \quad (1.2.7)$$

Обираємо початкові умови руху так, щоб $x_0 = y_0 = 0$, це не вплине принципово на кінцевий результат, але спростить математичні викладки. Тоді з урахуванням того, що: $V_{0x} = V_0 \cos\gamma;\ V_{0y} = V_0 \sin\gamma$, з (1.2.7) маємо:

$$\begin{cases} x = V_0 t \cos\gamma; \\ y = V_0 t \sin\gamma - gt^2/2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = x/(V_0 \cos\gamma) = x/(\sqrt{2gh}\cos\gamma); \\ y = x \cdot tg\gamma - x^2/(4h\cos^2\gamma). \end{cases} \quad (1.2.8)$$

Значить, вертикальна координата y є поліномом другого порядку від горизонтальної координати *x*. Тобто, це є парабола. Її гілки орієнтовано донизу, бо коефіцієнт перед x^2 є від'ємним.

В граничному випадку, коли $\alpha \to 0$, маємо $x \to 0$, а рівняння $y = y(t)$ збігається з відомим виразом для зміни вертикальної координати матеріальної точки, яка рухається вертикально у полі тяжіння. Зростання величини кута похилої площини до значення $\alpha = \pi/4$ призводить до зменшення величини кута γ до нуля, що означає зменшення висоти підйому матеріальної точки при відбитті над рівнем точки падіння. Якщо $\alpha = \pi/4$, то початкова швидкість після відбиття має тільки горизонтальну складову, що означає: координата *x* зростає при цьому найшвидше, координата *y* відразу після відбиття зменшує своє значення.

Відповідь: $y = x \cdot tg\gamma - x^2/(4h\cos^2\gamma)$.

Задача 3

Дано: Вздовж мотузки без тертя падає муфта маси *m*. Довжина мотузки без деформації *l*, коефіцієнт жорсткості *k*. Муфта падає на невагомий фіксатор, який знаходиться на кінці мотузки.
Знайти: максимальну довжину деформації мотузки.
Розв`язання:

Це - одновимірна задача, тому не будемо малювати рисунок. Зорієнтуємо вісь $\vec{X}$ вертикально вниз уздовж мотузки; початок системи координат розташуємо в кінці мотузки, яка ще не деформована.

У векторному вигляді рух муфти, яка, тиснучи на фіксатор, деформує мотузку, описується другим законом Ньютона, при цьому результуюча сила складається з сили тяжіння та сили Гука. Це рівняння має вигляд:

$$md^2\vec{x}/dt^2 = \vec{F}_{рез} = m\vec{g} - \vec{e}_x kx. \quad (1.2.9)$$

Перепишемо його у вигляді проекції на вісь $\vec{X}$:

$$d^2x/dt^2 = g - kx/m. \quad (1.2.10)$$

Оскільки це є диференціальне рівняння другого порядку, в якому немає першої похідної dx/dt, то для знаходження його розв'язку скористаємося одним з найпоширеніших методів – методом заміни змінної. Зробимо наступну заміну змінної: $\xi = x - mg/k$, тоді:

$$d^2\xi/dt^2 = d^2x/dt^2 = -k(x - mg/k)/m = -k\xi/m. \quad (1.2.11)$$